

1.1 Shrnutí základních poznatků

Úlohy z této oblasti patří k základním v nauce o pružnosti a pevnosti. Bez pochopení a zvládnutí metodiky řešení těchto úloh lze jen těžko zvládnout další složitější případy namáhání a deformace těles a jejich soustav.

Úlohy v nauce o pružnosti a pevnosti dělíme do dvou skupin:

a) **Úlohy o pevnosti.** Sem patří úlohy dimenzování (určování rozměrů) součástí tak, aby při působení vnějších sil vyhověly pevnostně, tj. aby za provozu nedošlo k jejich porušení nebo ke vzniku plastických deformací, které by znemožnily funkci konstrukce. Lze se zde setkat také s inverzními úlohami, kdy je úkolem určit maximální možné síly, které lze ještě v konstrukci (na součást) připustit, aby nedošlo k překročení dovolené hodnoty napětí.

Základními vztahy v tomto případě jsou:

- Podmínky rovnováhy vnějších účinků (viz obr. 1):

$$F - R = 0 \quad \Rightarrow \quad R = F. \quad (1)$$

- Podmínky rovnováhy vnějších a vnitřních účinků, např. na části I (slouží k určení vnitřních silových účinků, N - normálová složka, T_y a T_z - smykové složky):

$$\begin{aligned} \sum_i F_{ix} = 0 : \quad F - N = 0 \quad \Rightarrow \quad N = F, \\ \sum_i F_{iy} = 0 : \quad T_y = 0, \\ \sum_i F_{iz} = 0 : \quad T_z = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

- Vztah pro určení napětí v řezu prutu:

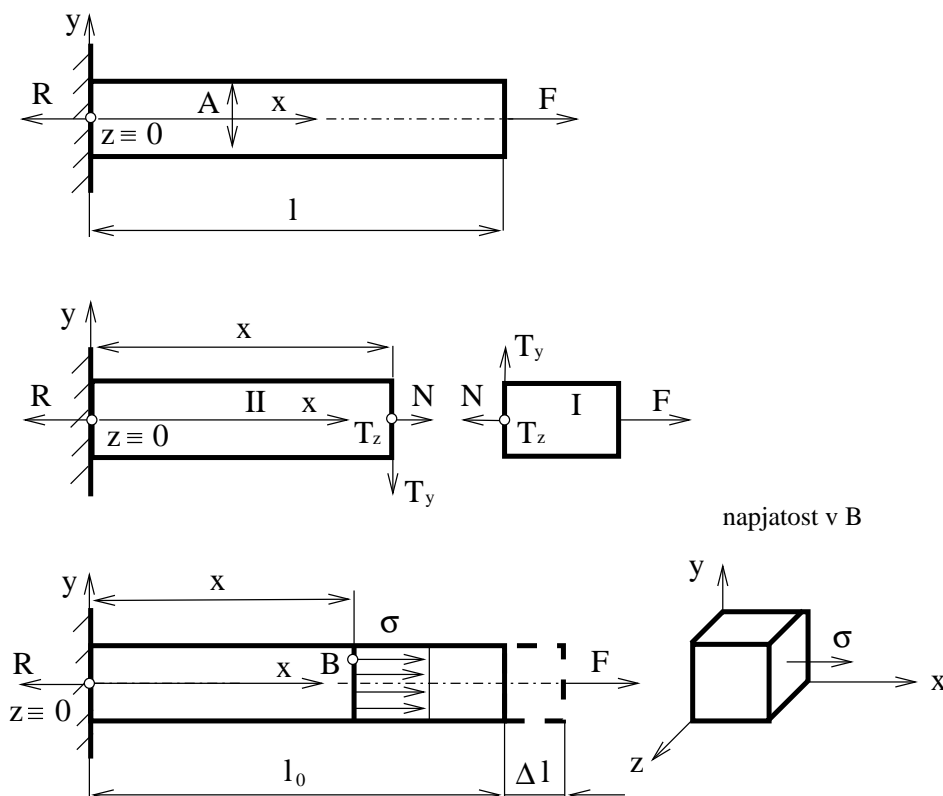
$$\sigma = \frac{N}{A} \quad \Rightarrow \quad N = \sigma A, \quad (3)$$

kde σ ([MPa], [N/mm²]) je normálové napětí. Zde je předpokládáno jeho rovnoměrné rozložení po průřezu A ([m²], [mm²]). Symbol N ([N]) představuje vnitřní normálovou sílu (v tomto případě totožnou s působící silou F v ose prutu, viz obr. 1).

b) **Úlohy o tuhosti.** Zde se určují deformace těles a konstrukcí. Při prostém tahu se jedná o základní rovnice lineární teorie pružnosti:

TAH - TLAK

Autoři: F. Plánička, M. Zajíček, V. Adámek



Obr. 1: Prut namáhaný osovou silou.

- Hookeův zákon

$$\sigma = E\varepsilon, \quad \text{pro } \sigma \in \langle 0, \sigma_u \rangle, \text{ nebo přibližně pro } \sigma \in \langle 0, \sigma_K \rangle, \quad (4)$$

kde E ([MPa], [N/mm²]) je modul pružnosti v tahu (Youngův modul pružnosti), σ_U ([MPa], [N/mm²]) je mez úměrnosti, $\sigma_K = (R_e, R_p0, 2)$ ([MPa], [N/mm²]) je výrazná R_e nebo smluvní mez kluzu $R_p0, 2$.

- Poměrné prodloužení (zkrácení), viz obr. 1

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}, \quad (5)$$

kde Δl ([m], [mm]) je absolutní změna délky prutu a l_0 ([m],[mm]) je původní délka prutu.

S ohledem na rovnice (5), (4) a (3) bude změna délky prutu

$$\Delta l = \varepsilon l_0 = \frac{\sigma}{E} l_0 = \frac{N l_0}{AE} = \frac{F l_0}{AE}. \quad (6)$$

Rovnice (6) lze upravit také do tvaru

$$F = \Delta l \frac{AE}{l_0}. \quad (7)$$

TAH - TLAK

Autoři: F. Plánička, M. Zajíček, V. Adámek

Odtud vyplývá vztah pro součinitel tuhosti (tuhost) c , který vyjadřuje sílu, jež způsobí deformaci $\Delta l = 1$. Potom bude

$$c = \frac{AE}{l_0}. \quad (8)$$

Rovnice (4) představuje Hookeův zákon pro prostý tah (tlak), tj. pro jednoosou napjatost (obr. 1). Pro obecnou prostorovou napjatost je Hookeův zákon vyjádřen rovnicemi

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_x &= \frac{1}{G} \tau_x, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)], & \gamma_y &= \frac{1}{G} \tau_y, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_z &= \frac{1}{G} \tau_z, \end{aligned} \quad (9)$$

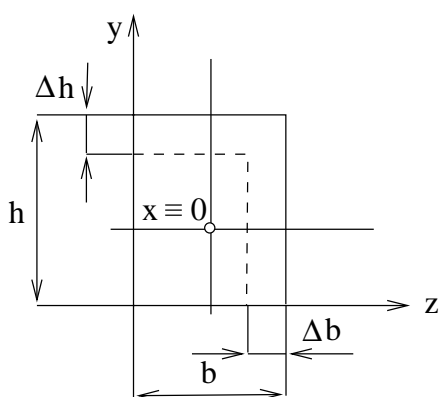
kde G je modul pružnosti ve smyku ([MPa]),
 μ je Poissonovo číslo,
 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ jsou poměrné deformace (prodloužení, zkrácení),
 $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ jsou zkosení,
 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ normálová napětí ([MPa], [N/mm²]),
 τ_x, τ_y, τ_z jsou smyková napětí ([MPa], [N/mm²]).

Ze zákona sdružených smykových napětí přitom vyplývá $\tau_x = \tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_y = \tau_{xz} = \tau_{zx}$ a $\tau_z = \tau_{xy} = \tau_{yx}$. Vztah mezi oběma moduly pružnosti E a G je

$$\frac{E}{G} = 2(1 + \mu). \quad (10)$$

Pro deformace při jednoosé napjatosti ve shodě s obr. 1 a obr. 2 platí

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l_0}, \quad \varepsilon_y = \frac{\Delta h}{h}, \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta b}{b}, \quad \text{kde } \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu \varepsilon_x. \quad (11)$$



Obr. 2: Příčné deformace průřezu prutu.

Poměrnou změnu objemu ε_v , ke které při deformaci dochází, lze pomocí těchto poměrných deformací vyjádřit jako

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (12)$$

Je-li prut navíc pod vlivem teploty, je nutné tento vliv také zahrnout. Pro jednoosou napjatost, s ohledem na rovnici (4), bude

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta T, \quad (13)$$

kde α ([K⁻¹], [°C⁻¹]) je součinitel lineární teplotní roztažnosti a $\Delta T = (T_1 - T_0)$ je změna teploty ([K], [°C]).

TAH - TLAK

Autoři: F. Plánička, M. Zajížek, V. Adámek

Pevnostní podmínky podle typu materiálu rozlišujeme na:

- podmínku pro tvárný materiál, pro který se uvažuje $\sigma_{Kt} = \sigma_{Kd} = \sigma_K = (R_e, R_{p0,2})$, kde σ_{Kt} je mez kluzu v tahu, σ_{Kd} mez kluzu v tlaku, R_e výrazná mez kluzu u nízkouhlových ocelí a $R_{p0,2}$ je smluvní mez kluzu, viz obr. 3. Pro tahové napětí ($\sigma_{max} > 0$) má podmínka tvar

$$\sigma_{max} \leq \sigma_D, \quad (14)$$

pro tlakové napětí ($\sigma_{max} < 0$) má podmínka tvar

$$|\sigma_{max}| \leq \sigma_D, \quad (15)$$

kde $\sigma_D = \frac{\sigma_K}{k}$ je dovolené napětí, $k > 1$ je součinitel bezpečnosti (obr. 3).

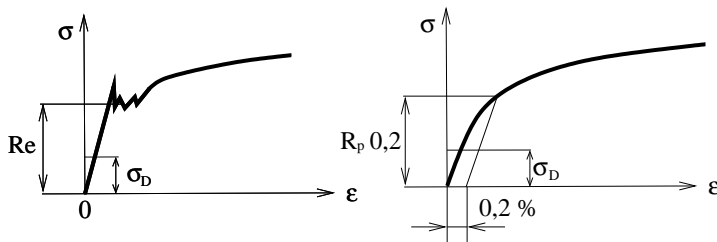
- podmínku pro křehký materiál, pro který je $R_{mt} < R_{md}$, kde R_{mt} je mez pevnosti v tahu a R_{md} je mez pevnosti v tlaku, viz obr. 4. Pro tahové napětí ($\sigma_{max} > 0$) má podmínka tvar

$$\sigma_{max} \leq \sigma_{Dt}, \quad (16)$$

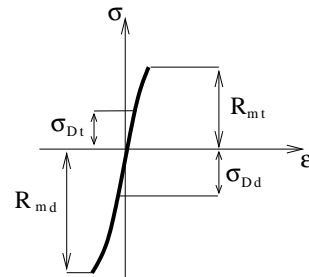
pro tlakové napětí ($\sigma_{max} < 0$) má podmínka tvar

$$|\sigma_{max}| \leq \sigma_{Dd}, \quad (17)$$

kde $\sigma_{Dt} = \frac{R_{mt}}{k_p}$ je dovolené napětí v tahu, $\sigma_{Dd} = \frac{R_{md}}{k_p}$ je dovolené napětí v tlaku (obr. 4) a k_p je součinitel bezpečnosti vůči mezi pevnosti.



Obr. 3: Pracovní diagramy materiálů s výraznou a smluvní mezí kluzu.



Obr. 4: Pracovní diagram pro křehký materiál.